Examen blanc : résultats envoyés par e-mail

Exemple 8.11 :

(i) Calculons le DL de $\frac{e^x}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} e^x = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \underbrace{\frac{3}{2}x^3}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}x^4}_{(2)} + \underbrace{o(|x|^2)}_{(3)\checkmark} + \underbrace{o(|x|^2)}_{(4)\checkmark} + \underbrace{x\,o(|x|^2)}_{(5)} + \underbrace{x\,o(|x|^2)}_{(5)}$$

$$+ \underbrace{x^2 o(|x|^2)}_{(6)} + \underbrace{\frac{x^2}{2} o(|x|^2)}_{(6)} + \underbrace{o(|x|^2) \cdot o(|x|^2)}_{(7)}$$

(1) $\frac{3}{2}x^3 \overset{?}{=} o(|x|^2)$: $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{2}x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{2}x = 0$ oui !

(2) $\frac{1}{2}x^4 \overset{?}{=} o(|x|^2)$: $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^4}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$ oui !

(5) $x \cdot o(|x|^2) \overset{?}{=} o(|x|^2)$, Soit $r(x)$ la fonction qui se cache sous $o(|x|^2)$

(5) $x \cdot r(x) \overset{?}{=} o(|x|^2)$: $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot r(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{r(x)}{x^2}}_{\to 0} = 0$ oui

(6) $x^2 \cdot \underline{o(|x|^2)} \overset{?}{=} o(|x|^2)$ Soit $r(x)$ la fonction qui se cache sous $\underline{o(|x|^2)}$

$x^2 \cdot r(x) \overset{?}{=} o(|x|^2)$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot r(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\to} \cdot \underbrace{\frac{r(x)}{x^2}}_{\to 0} = 0$ oui

$o(|x|^2) \cdot o(|x|^2) \overset{?}{=} o(|x|^2)$ Soit $\underline{r_1(x)}$ et $r_2(x)$ les fonctions qui se cachent sous chaque $o(|x|^2)$

$r_1(x) \cdot r_2(x) \overset{?}{=} o(|x|^2)$: $\lim_{x \to 0} \frac{r_1(x) \cdot r_2(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{r_1(x)}{x^2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{r_2(x)}{x^2}}_{\to 0}$

$= 0$ oui

$$\Rightarrow \frac{e^x}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + g \cdot o(|x|^2)$$

$$= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(|x|^2)$$ est le DL d'ordre 2 de $\frac{e^x}{1-x}$

(ii) Calculons le DL de $\cos(\pi + \sin(x))$ d'ordre 3 autour de 0

$\cos(\pi + \sin(x)) = g(f(x))$ avec $f(x) = \pi + \sin(x)$ à développer autour de 0

& $g(y) = \cos(y)$ à développer autour de $\boxed{f(0) = \pi}$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(|x|^3) \Rightarrow \pi + \sin(x) = \pi + x - \frac{1}{6}x^3 + o(|x|^3)$$

$\cos(y)$

$$\cos(y) = \cos(y - \pi + \pi) = -\cos(y - \pi) = -\left(1 - \frac{1}{2}(y-\pi)^2\right) + o(|y-\pi|^3)$$

$\cos(x)$ $\qquad\qquad$ $\cos(\pi) = -1$

$\cos'(x) = -\sin(x)$ $\qquad\qquad$ $-\sin(\pi) = 0$

$\cos''(x) = -\cos(x)$ $\qquad\qquad$ $-\cos(\pi) = 1$

$\cos'''(x) = \sin(x)$ $\qquad\qquad$ $\sin(\pi) = 0$

$$\cos(y) = -1 + \frac{0}{1!}(y-\pi) + \frac{1}{2!}(y-\pi)^2 + \frac{0}{3!}(y-\pi)^3 + o(|y-\pi|^3)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}(y-\pi)^2 + o(|y-\pi|^3)$$

$$\Rightarrow \cos(\pi + \sin(x))$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\left(\cancel{\pi} + x - \frac{1}{6}x^3 + o(|x|^3) \cancel{-\pi}\right)^2 + o\Big(\underbrace{\cancel{|\pi + \sin(x) - \pi|^3}}_{o(|x|^3)}\Big)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{36}x^6 + o(|x|^3)\cdot o(|x|^3) - \frac{1}{3}x^4 + 2\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)o(|x|^3)\right) + o(|x|^3)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{2}o(|x|^3)\cdot o(|x|^3) - \frac{1}{6}x^4 + x\cdot o(|x|^3) - \frac{1}{6}x^3 o(|x|^3) + o(|x|^3)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}x^2 + o(|x|^3)$$

Exemple 8.12 (application au calcul de limites)

(i) Calculons : $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2) - \frac{1}{2} x \sin(x^3)}{x^8}$$

On pourrait appliquer B.H, mais 'faudrait l'appliquer 8x ... c'est dur sans faire de faute

À la place DL d'ordre 8 autour de 0

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + o(|x|^8)$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 \cancel{- \frac{1}{6!}x^{12} + \frac{1}{8!}x^{16}} + o(|x|^8) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8$$

$$1 - \cos(x^2) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4!}x^8 + o(|x|^8)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8)$$

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{1}{3!}x^9 + \frac{1}{5!}x^{15} - \frac{1}{7!}x^{21} + o(|x|^8) = x^3 + o(|x|^8)$$

$$\frac{1}{2}x\sin(x^3) = \frac{1}{2}x^4 + o(|x|^8)$$

$$\Rightarrow 1-\cos(x^2) - \frac{1}{2}x\cdot\sin(x^3) = -\frac{1}{24}x^8 + o(|x|^8)$$

Conclusion

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2) - \frac{1}{2}x\sin(x^3)}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{24}x^8 + o(|x|^8)}{x^8}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cancel{\frac{x^8}{x^8}}\ \frac{-\frac{1}{24} + \cancel{\frac{o(|x|^8)}{x^8}} \to 0}{1} = -\frac{1}{24}$$

(ii) Calculons

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x^2) - \frac{1}{2} x \sin(x^3)}{(\sin(x))^8}$$

DL jusqu'à quel ordre ? Objectif : 1 seul terme dans le DL du dénominateur : choisir n de telle sorte que le DL du dénom. s'écrit :

$$a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad a_n \neq 0$$

3 strats pour trouver n :

1- On vise large et on ajuste : on calcule le DL de $\sin(x)^8$ à l'ordre 14 ou 20

On obtient $\text{dénom} = a_n (x-x_0)^n + a_{n+1} (x-x_0)^{n+1} + \dots + a_{k} (x-x_0)^{k}$

$+ o(|x-x_0|^{k})$

$\Rightarrow \text{dénom} = a_n (x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n)$

2 – Première dérivée non nulle.

$\text{dénom}(x_0) = 0$

$\text{dénom}'(x_0) = 0$

$\text{dénom}''(x_0) = 0$

$\vdots$

$\text{dénom}^{(n-1)}(x_0) = 0$

$\text{dénom}^{(n)}(x_0) \neq 0$

3- On remplace les fonctions par le 1er terme non nul et on regarde l'ordre du terme

si dénom $(x) = (\sin(x))^8$

$\sin(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$

$\sin(x) \Leftrightarrow x$

$(\sin(x))^8 \Leftrightarrow (x)^8 = x^8 \Rightarrow n = 8$

si dénom $(x) = (\sin(x)^8)(1-\cos(x))^4$ autour de $x_0 = 0$

$\sin(x) \Leftrightarrow x$

$1-\cos(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots$

$1-\cos(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2$

$(\sin(x))^8(1-\cos(x))^4 \Leftrightarrow x^8 \cdot \frac{1}{2^4}x^8 = \frac{1}{2^4}x^{16} \Rightarrow n = 16$

On calcule les DLs d'ordre 8 de num & dénom.

$$1-\cos(x^2)+\frac{1}{2}x\sin(x^3) = -\frac{1}{24}x^8 + o(|x|^8)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8)$$

$$\left(\sin(x)^8\right) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8)\right)\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8)\right)\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8)\right)$$

avec 8 parenthèses.

Dès que dans une des parenthèses je choisis un terme différent de "x", je vais terminer avec un terme de degré 10 ou plus qui va disparaître dans le reste!

$$\Rightarrow \quad (\sin(x))^8 = x^8 + o(|x|^8)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^8 - x^8}{x^8} = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\Big)^8 - 1 = 1^8 - 1 = 0$$

retour à

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2) - \frac{1}{2}x\sin(x^3)}{(\sin(x))^8} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{24}x^8 + o(|x|^8)}{x^8 + o(|x|^8)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cancel{\frac{x^8}{x^8}}^{\,1} \; \frac{-\frac{1}{24} + \cancel{\frac{o(|x|^8)}{x^8}} \to 0}{1 + \cancel{\frac{o(|x|^8)}{x^8}} \to 0} = -\frac{1}{24}$$

§8.2 Séries de Taylor

$f(x)$, $f \in C^\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(|x|^n)$

plus n est grand, plus $f(x)$ est proche de $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

$\Rightarrow$ Que se passe-t-il si on prend la limite quand n tend vers $+\infty$?

Espoir : $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(|x|^n)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad + \quad \underbrace{\lim_{n \to +\infty} o(|x|^n)}_{\overset{?}{=} 0}$$

Exemple 8.13

(i) Des fois, oui !

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + r_n(x) \qquad \text{avec } r_n(x) = o(|x|^n)$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$= \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} = 0$$

$\Rightarrow$ on a bien $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

(ii) Des fois, non !

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f est C^∞ : $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{|x|} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

et $\forall n$, $x \neq 0$ $f^{(n)}(x) = (\text{désordre})\, e^{-\frac{1}{|x|}}$

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\text{désordre}}_{\substack{\to +\infty \\ \text{à vitesse polynomiale}}}\right) \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\substack{\to 0 \\ \text{à vitesse exponentielle}}} = 0$$

$\Rightarrow$ toutes les dérivées de f existent en 0 et $\forall n$,

$f^{(n)}(0) = 0$. $\quad \hookrightarrow$ par thm 6.12

$f \in C^\infty$